

1. ZH – megoldásokkal

1. feladat:

Adott egy N db független és megkülönböztethető --- $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$; $g_2 = 3$
 atomból álló rendszer. A rendszernek 3 energiaszintje
 van, melyek a hozzájuk tartozó multiplicitással a --- $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$; $g_1 = 2$
 jobboldali ábrán láthatóak. Számítsd ki a rendszer
 belső energiáját! [5 pont] --- ε_0 $g_0 = 1$

Megoldás:

Mivel a részecskék függetlenek, ezért az állapotösszeg felírható az egyrészecske-állapotösszegek szorzataként:

$$Z = \zeta^N$$

Az egyrészecske-állapotösszeg a következőképp írható fel:

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{\{k,\ell\}} e^{-\beta\varepsilon_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{g_k} e^{-\beta\varepsilon_k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_k} \sum_{\ell=1}^{g_k} 1 = \sum_{k=0}^{\infty} g_k e^{-\beta\varepsilon_k} = \\ &= \sum_{k=0}^{k=2} g_k e^{-\beta\varepsilon_k} = e^{-\beta\varepsilon_0} + 2e^{-2\beta\varepsilon_0} + 3e^{-4\beta\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Ezzel a belső energia:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln \zeta^N = -N \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \zeta \quad \underbrace{\quad}_{\text{beírjuk } \zeta\text{-t}} \\ &= -N \frac{\partial}{\partial\beta} \ln(e^{-\beta\varepsilon_0} + 2e^{-2\beta\varepsilon_0} + 3e^{-4\beta\varepsilon_0}) = \\ &= -N \left(\underbrace{\frac{1}{e^{-\beta\varepsilon_0} + 2e^{-2\beta\varepsilon_0} + 3e^{-4\beta\varepsilon_0}}}_{\partial(\text{külső fv.})} \right) \underbrace{(-\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0} - 4\varepsilon_0 e^{-2\beta\varepsilon_0} - 12\varepsilon_0 e^{-4\beta\varepsilon_0})}_{\partial(\text{belső fv.})} = \\ &= N\varepsilon_0 \frac{e^{-\beta\varepsilon_0} + 4e^{-2\beta\varepsilon_0} + 12e^{-4\beta\varepsilon_0}}{e^{-\beta\varepsilon_0} + 2e^{-2\beta\varepsilon_0} + 3e^{-4\beta\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

2. feladat:

A fotongáz szabadenergiája a következőképp írható fel:

$$F(T, V) = -\frac{1}{3}V \underbrace{\frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3}}_{\text{konstans} \equiv \gamma} T^4 = -\frac{1}{3}\gamma VT^4$$

a) Számítsd ki az entrópia hőmérséklet függését! ($S(T, V) - ?$) [2 pont]

b) Az előző pontban kapott eredmény segítségével fejezd ki a szabadenergiából a belső energiát az entrópia és a térfogat függvényeként! (Segítség: Legendre-transzformációt kell végrehajtani: $F(T, V) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(S, V)$.) [5 pont]

Megoldás:

a)

$$S(T, V) = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T} \left[-\frac{1}{3}\gamma VT^4 \right] = \frac{1}{3}\gamma V \frac{\partial}{\partial T} [T^4] = \frac{4}{3}\gamma VT^3$$

Tehát:

$$S \sim T^3$$

b) A Legendre-transzformáció általánosan a következőképp írható fel:

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(z); \quad g(z) \Rightarrow \begin{cases} g(z) = f(x) - xz \\ z = f'(x) = \frac{df}{dx} \end{cases}$$

A hőmérséklet szerinti deriválást az a) pontban már elvégeztük, és azt kaptuk, hogy:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \left(= \frac{4}{3}\gamma VT^3 \right)$$

Így a Legendre-transzformáció az $F(T, V) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(S, V)$ esetben a következőképp írható fel:

$$F(T, V) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(S, V); \quad U(S, V) \Rightarrow \begin{cases} U(S, V) = F(T, V) + ST \\ S = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial T} \end{cases}$$

Elvégezve az átrendezést és a behelyettesítést:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4}{3}\gamma VT^3 \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} S \right)^{\frac{1}{3}}$$

T-t egyből átírva:

$$\begin{aligned} U(S, V) &= F(T, V) + ST = -\frac{1}{3}\gamma VT^4 + ST = -\frac{1}{3}\gamma V \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} S \right)^{\frac{4}{3}} + S \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} S \right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= S^{\frac{4}{3}} \left[\left(\frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\gamma V \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} \right)^{\frac{4}{3}} \right] = S^{\frac{4}{3}} \left[\left(\frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\gamma V \frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} \right) \right] \\ &= S^{\frac{4}{3}} \left[\left(\frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{3}{4} S^{\frac{4}{3}} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Először S-t behelyettesítve, majd T-t:

$$\begin{aligned} U(S, V) &= F(T, V) + ST = -\frac{1}{3}\gamma VT^4 + ST = -\frac{1}{3}\gamma VT^4 + \frac{4}{3}\gamma VT^3T = \\ &= T^4 \left(\frac{4}{3}\gamma V - \frac{1}{3}\gamma V \right) = \gamma VT^4 = \gamma V \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} S \right)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} S^{\frac{4}{3}} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{\gamma V} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Tehát: $U(S, V) \sim S^{\frac{4}{3}}$.