8. óra

Paramágnesség statisztikus fizikája - *folytatás*:

Független, lokalizált mágneses atomok, külső mágneses térben

A rendszer mágnesezettsége:

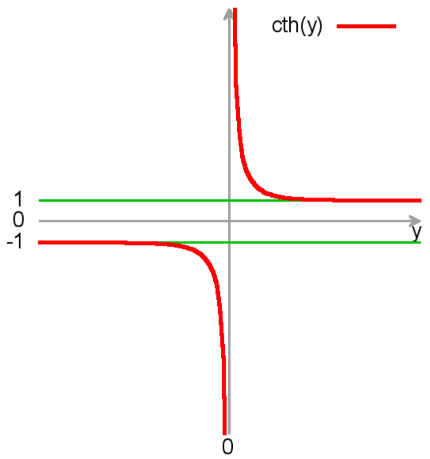
$$VM = k_B T N \frac{\partial \ln \zeta}{\partial B} = \cdots = \underbrace{N g \mu_B J}_{\equiv V M_{\text{telített}}} \underbrace{\left[\left(\frac{2J+1}{2J}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{2J+1}{2J} \cdot Jx\right) - \frac{1}{2J} \operatorname{cth}\left(\frac{1}{2J} \cdot Jx\right)\right]}_{\equiv B_J(Jx)\ \to\ \text{Brillouin-függvény}}$$

$$== V \cdot M_{\text{telített}} \cdot B_J(Jx)$$

Nézzük meg a Brillouin-függvény viselkedését $y \to \infty$ és $y \to 0$ határesetekben. $(y = Jx)$

$y \to \infty$ esetben kihasználjuk, hogy $\operatorname{cth}\left(\frac{2J+1}{2J} y\right) \to 1$.

$y \to 0$ esetben pedig $\operatorname{cth}\left(\frac{2J+1}{2J} y\right)$ Taylor-sorát fogjuk használni. Mivel $y \to 0$, ezért a magasabb rendű tagok hamar 0-hoz tartanak, így csak az első két tagot tartjuk meg.



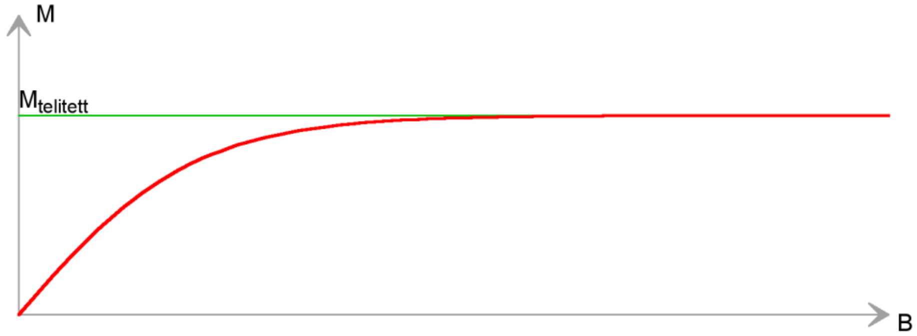
$$\operatorname{cth}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left[1 + \frac{1}{3}\alpha^2 + \cdots\right]$$

$$B_J(y) = \begin{cases} \text{ha } y \to \infty: & \dfrac{2J+1}{2J} - \dfrac{1}{2J} = 1 \\ \text{ha } y \to 0: & \dfrac{1}{3}\dfrac{2J+1}{2J}\dfrac{2J+1}{2J} y - \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2J}\dfrac{1}{2J} y = \dfrac{1}{3}\dfrac{y}{4J^4}\left((2J+1)^2 - 1\right) = \dfrac{1}{3}\dfrac{J+1}{J} y \end{cases}$$

Így (x-et visszaírva) a mágnesezettség:

$$M = M_{\text{telített}} \cdot B_J\left(J \frac{g\mu_B}{k_B T} B\right),$$

és látható, hogy $B = 0$-ra $M = 0$ és $B \to \infty$-re $M \to M_{\text{telített}}$.



Mágneses szuszceptibilitás (χ)

- megadja, hogy a mágneses tér milyen mértében mágnesezi át a rendszert:

$$\mu_0 M = \chi B,$$

ahol μ_0 a **vákuum permeabilitása!** $\left(\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\left[\frac{H}{m}\right]\right)$

Nézzük a $B \to 0$ tartományt:

$$M = \left(\frac{N}{V}\right) g\mu_B \frac{1}{3}\frac{J+1}{J} J \frac{g\mu_B}{k_B T} B$$

Innen is látni (a paramágnességnek egy fontos tulajdonságát): ha nincs mágneses tér, nincs mágnesezettség.
Az utóbbi két összefüggés alapján a szuszceptibilitás:

$$\chi = \mu_0 \left(\frac{N}{V}\right)(g\mu_B)^2 \frac{J+1}{3} J \frac{1}{k_B T} = \mu_0 \frac{C}{T},$$

ahol *C* a Curie-állandó. Megkaptuk a Curie-törvényt: a szuszceptibilitás a hőmérséklet reciprokával arányos.

(Megjegyzés: a Curie-törvény nem általános érvényű. Más anyagoknál egy kritikus $[T_C]$ hőmérséklet alatt a szuszceptibilitás csökkenni kezd. Lásd pl: Ising-modell – alacsony hőmérsékleten a párkölcsönhatások dominálnak…)

Maxwell-féle sebesség-eloszlás

Nézzük meg, milyen ideális gázban, egyensúlyi állapotban az időtől független sebesség-eloszlást. Induljunk ki az impulzusból és használjuk fel a $p = mv$ összefüggést.

Jelöljük $f_M(p)$-vel a részecskék átlagos számát egy adott $[p, p + dp]$ intervallumban. Ezt a következőképp írhatjuk fel, impulzus-térbeli polárkoordinátákkal (az impulzus nagyságára):

$$f_M(p)dp = C_{\text{konst}} \cdot 4\pi p^2 e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} dp$$

Tudjuk, hogy minden részecske rendelkezik impulzussal, tehát a fenti függvény integrálja *N*. Ebből megkapható, hogy $C_{\text{konst}} = \frac{N}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}}$. Így az impulzusok eloszlása:

$$f_M(p) = N \frac{4\pi}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp$$

Most már kiszámolható az impulzus *n*-edik hatványának várható értékét:

$$\overline{p^n} = \frac{\int_0^\infty p^n f_M(p)dp}{\int_0^\infty f_M(p)dp \quad \} = N} = \frac{4\pi}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty p^{n+2} e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp \underbrace{=}_{x \equiv \frac{p}{\sqrt{2mk_B T}}}$$

$$= (2mk_B T)^{\frac{n+3}{2} - \frac{3}{2}} \cdot \frac{4\pi}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty x^{n+2} e^{-x^2} dx \underbrace{=}_{y \equiv x^2}$$

$$= (2mk_BT)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty y^{\frac{n+1}{2}} e^{-y} dy}_{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2mk_BT)^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \underbrace{\Longrightarrow}_{\overline{p^n} = m^n \overline{v^n}}$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{v^n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)$$

$n = 1$ esetben megkapjuk a sebesség várható értékét:

$$\bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\Gamma(2)}_{=1} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$