# 3. óra

<u>Gamma-függvény:</u>

$$\Gamma(\mathrm{n}+1) \equiv \int_0^\infty e^{-x}x^n dx \qquad (n > -1)$$

$$\Gamma(\mathrm{n}) \equiv \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1} dx \qquad (n > -1)$$

n = 1 eset: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

n = $\frac{1}{2}$ eset: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$

Fontos tulajdonság 1: $\Gamma(\mathrm{n}+1) = \mathrm{n}\Gamma(\mathrm{n})$

Bizonyítás (parc.int.-lal):

$$\Gamma(\mathrm{n}+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^n dx = -\int_0^\infty (e^{-x})' x^n dx = [e^{-x}x^n]_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1} dx = \mathrm{n}\Gamma(\mathrm{n})$$

Fontos tulajdonság 2: $\Gamma(\mathrm{n}+1) = \mathrm{n}!$

Rövid „bizonyítás" (felhasználva az 1. tulajdonságot):

$$\Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(2) = 2 \Rightarrow \Gamma(3) = 2 \Rightarrow \Gamma(4) = 6 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \Gamma(\mathrm{n}+1) = \mathrm{n}!$$

<u>n dimenziós gömb térfogata:</u>

$$V_R = \int^V dV = S_{n-1}\int_0^R r^{n-1} dr = S_{n-1}\frac{1}{n}R^n,$$

ahol $S_{n-1}$ az $(n-1)$ dimenziós egység-gömb felszíne. Ahhoz, hogy ezt megkapjuk, írjuk fel az n dimenziós Gauss-integrált:

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n e^{-\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)} = \left(\sqrt{\pi}\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

Polár-koordinátákkal felírva:

$$\mathbb{I} = \int_0^{+\infty} r^{n-1}S_{n-1}e^{-r^2} dr = S_{n-1}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-1}e^{-x} dx = \frac{1}{2}S_{n-1}\Gamma\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right)$$

Mivel a két utóbbi eredmény egyenlő, az alábbi összefüggést kapjuk $S_{n-1}$-re:

$$S_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{n}}{2}\right)}$$

Ellenőrzésképp nézzük meg az n=1,2,3 eseteket:

n = 1: $$S_0 = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

n = 2: $$S_1 = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi$$

n = 3: $$S_2 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 4\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} = 4\pi$$

Látható, hogy n=2-re és n=3-ra visszakaptuk az egységsugarú kör kerületét és az egységsugarú gömb felszínét.

Tehát az n dimenziós gömb térfogata:

$$V_R = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{n} R^n$$

---

(Előadáson) láttuk, hogyan írható fel 1 db *m* tömegű, *V* térfogatban mozgó részecske adott *E* energiához tartozó állapotainak száma, ha csak kinetikus energia tag van:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}.$$

1 db részecskét 6 db koordináta határoz meg a 6 dimenziós fázistérben:

3 hely $(q_x, q_y, q_z)$ és 3 impulzus $(p_x, p_y, p_z)$ koordináta.

Számítsuk ki előbb egy adott *E* energiaszint alatti állapotoknak a számát (*W(E)*)! Ez az *E* szint egy felületet határoz meg a 6 dimenziós fázistérben és azokat az elemi cellákat kell összeszámolnunk, melyek e szint alatt vannak – vagyis integrálnunk kell. Mivel nincs hely-függése a Hamilton-operátornak, így q-szerint integrálva egy *V* szorzót kapunk (a részecskénk bárhol lehet a *V* térfogatban).

A Hamilton-függvényen látszik, hogy az egy gömbi térfogatot határoz meg a $(p_x, p_y, p_z)$ 3 dimenziós fázistérben, melynek sugara $\left(\frac{p^2}{2m} = E - \text{t átrendezve}\right)$ $p = \sqrt{2mE}$. Tehát:

$$W(E) = \frac{1}{\hbar^3}\frac{4\pi}{3}(2mE)^{\frac{3}{2}} \cdot V$$

Ezt lederiválva megkapjuk egy adott *E* szinthez tartozó állapotok számát:

$$W(E) = \frac{V}{\hbar^3} 2\pi (2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}$$

Ha ennél a feladatnál maradva általánosítani szeretnénk 1 részecskéről több – **N db részecskére**, akkor 3p+3q koordináta helyett 3Np+3Nq koordinátánk lesz.

A fenti feladat meggondolásait követhetjük egészen a hely-koordináták szerinti integrálásig. Láttuk, hogy 1 részecske esetén $\mathcal{H}$ egy 3 dimenziós gömböt határoz meg a $(p_x, p_y, p_z)$ fázistérben. Mivel minden részecskéhez tartozik 3 db p koordináta, ezért N részecske esetén $\mathcal{H}$ egy 3N dimenziós gömböt határoz meg a 3N dimenziós $(p_{1x}, \dots, p_{3z})$ fázistérben. Ehhez szükség lesz a fentebb felírt n dimenziós gömb térfogatára, ahol most n = 3N. *W(E)* arányos lesz ezzel a térfogattal:

$$W(E) \sim V_R = \frac{2\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3\mathrm{N}}{2}\right)} \cdot \frac{1}{3N} R^{3N} = c_1 \cdot R^{3N},$$

ahol az 1 részecskés esethez hasonlóan a(z $R$) sugárban van az $E$ függés. ($c_1$ az összegyűjtött konstansok.) Így:

$$W(E) \sim c_2 \cdot E^{\frac{3N}{2}},$$

amit lederiválva láthatjuk, hogyan függ egy adott energiához tartozó állapotok száma az energiától:

$$W'(E) \sim c_2 \cdot \frac{3N}{2} E^{\frac{3N}{2}-1}$$