

1. óra

Matematikai bevezetés

Stirling-formula: $n \gg 1$ esetén

$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

Gauss-integrál: (egyszerű, rövid levezetés)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Bizonyítás: integráljuk a teljes 2D térre az

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$$

kifejezést (1) descartes és (2) polár koordináták szerint.

$$(1) \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$(2) \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} dr \right) =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr$$

Elvégezve az $s = -r^2$ ($ds = -2r dr$) változó cserét:*(parciálisintegrálással is megoldható...)*

$$2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = 2\pi \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^s ds = \pi \int_{-\infty}^0 e^s ds = \pi [e^s]_{-\infty}^0 = \pi(e^0 - e^{-\infty})$$

$$= \pi(1 - 0) = \pi$$

(1) = (2), ezért:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

A Gauss integrál általános alakja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

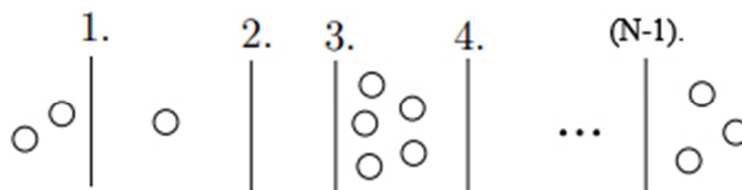
Kombinatorikai példa:

Összesen hányféleképpen helyezhetünk el M db golyót N db dobozba, ha különböző esetnek számít az eset, amikor egy golyót átteszünk egy másik dobozba?



A kezelhetőség kedvéért fogalmazzuk át a feladatot:

Legyen M db golyónk, melyeket (pl az asztalon) válasszunk el egymástól $(N-1)$ db fallal. Ekkor ugyanazt a feladatot kapjuk, mint az előző esetben (M golyót N részre osztottunk):



A kritériumok a következőképp módosulnak:

- 1) Nem kapunk új állapotot, ha két golyót vagy két falat cserélünk fel.
- 2) Új állapotot kapunk, ha egy golyót felcserélünk egy fallal.

Az összes lehetséges állapotot akkor kapjuk meg, ha az összes lehetséges permutációt osztjuk azokkal a permutációkkal, melyek nem eredményeznek új állapotot:

$$\Omega = \frac{(M + N - 1)!}{M! (N - 1)!}$$

$N \gg 1$ és $M \gg 1$ esetén:

$$\Omega = \frac{(M + N)!}{M! N!}$$

Vegyük ez utóbbi logaritmusát (ahol alkalmazhatjuk a Stirling-formulát):

$$\begin{aligned} \ln \Omega &= \ln \left(\frac{(M + N - 1)!}{M! (N - 1)!} \right) = \ln(M + N)! - \ln M! - \ln N! \approx \\ &\approx (N + M) \ln(N + M) - (N + M) - (M \ln M - M) - (N \ln N - N) = \\ &= (N + M) \ln(N + M) - M \ln M - N \ln N \end{aligned}$$

Egyszerű példa integrál átalakításra:

Impulzus-négyzet 3D-ben: $\underline{p}^3 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$

Egy Gauss-integrálba beírva:

$$\begin{aligned}\iiint e^{-\alpha \underline{p}^2} d\underline{p}^3 &= \iiint e^{-\alpha(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} dp_x dp_y dp_z = \\ &= \iiint e^{-\alpha p_x^2} e^{-\alpha p_y^2} e^{-\alpha p_z^2} dp_x dp_y dp_z = \\ &= \left(\int e^{-\alpha p_x^2} dp_x \right) \left(\int e^{-\alpha p_y^2} dp_y \right) \left(\int e^{-\alpha p_z^2} dp_z \right)\end{aligned}$$